ESSEC

CONCOURS D'ADMISSION DE 1997

OPTION TECHNOLOGIQUE

Mathématiques

Vendredi 2 Mai 1997 de 14h à 18h

Exercice 1

On considère dans le plan les 3 points A(0, 0), B(1, 0), C(2, 1) et, à toute droite D d'équation y = ax + b, on associe les 3 points A', B', C' de cette droite D dont les abscisses sont respectivement 0, 1, 2.
L'objectif de l'exercice est de déterminer la droite des moindres carrés de ce nuage de 3 points, c'est à dire la droite D d'équation y = ax + b minimisant l'expression:

$$f(a, b) = (A'A)^2 + (B'B)^2 + (C'C)^2.$$

1°) Etude d'un cas particulier.
Représenter sur une même figure (unité 6 centimètres) la droite D et les 6 points A, B, C, A', B', C' lorsque a = 1/2 et b = -1/6. Que vaut alors f(a, b)?

2°) Etude du cas général.
a) Déterminer en fonction des nombres réels a et b les ordonnées des 3 points A', B', C' et les longueurs A'A, B'B, C'C. En déduire que:

$$f(a,b) = 3b^2 - 2(1-3a)b + 5a^2 - 4a + 1 = 3\left(b - (\frac{1}{3} - a)\right)^2 + 2a^2 - 2a + \frac{2}{3}.$$

b) En déduire que, lorsque le nombre réel a est fixé, l'expression f(a, b) est minimale si et seulement si b = 1/3 - a.
c) Calculer g(a) = f(a, 1/3 - a), puis étudier cette fonction g de la variable réelle a (on calculera sa dérivée et on dressera son tableau de variation).
En déduire pour quelle valeur de a cette fonction g est minimale, et préciser la valeur associée de b = 1/3 - a.
d) En déduire le couple (a, b) minimisant l'expression f(a, b), puis l'équation y = ax + b de la droite des moindres carrés du nuage des 3 points A, B, C.

Une calculatrice de poche pouvant être programmable et /ou alphanumérique, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de surface de base maximum de 21 cm de long sur 15 cm de large est autorisée.

Exercice 2

On se propose de déterminer des valeurs approchées du nombre $\sqrt{3}$ à l'aide de la suite définie par son premier terme $u_0 = 2$ et, pour $n \geq 0$, par la relation:

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{3}{u_n}).$$

1°) Etude d'une fonction auxiliaire.
On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par:

$$f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{3}{x}).$$

a) Calculer la dérivée et étudier les variations de f sur $]0, +\infty[$.
En déduire le minimum de la fonction f sur $]0, +\infty[$.
b) Déterminer les limites de f quand x tend vers 0 et $+\infty$, puis étudier l'existence d'une éventuelle asymptote de f quand x tend vers $+\infty$.
c) Tracer la courbe représentative de f sur $]0, +\infty[$ (unité 2 centimètres).

2°) Etude de la convergence de la suite (u_n).
a) Etablir que, pour tout nombre entier naturel n, $u_n > 0$, puis déduire de la question précédente que $u_n \geq \sqrt{3}$.
b) En déduire le signe de $u_{n+1} - u_n$ et la décroissance de la suite (u_n).
c) Etablir à l'aide de l'expression de f'(x) que $0 \leq f'(x) \leq 1/8$ pour $\sqrt{3} \leq x \leq 2$.
En appliquant l'inégalité des accroissements finis (dont on rappellera l'énoncé) à la fonction f sur le segment $[\sqrt{3}, u_n]$, montrer que $0 \leq u_{n+1} - \sqrt{3} \leq (u_n - \sqrt{3})/8$, et que:

$$0 \leq u_n - \sqrt{3} \leq \frac{2-\sqrt{3}}{8^n}.$$

d) En déduire la convergence de la suite (u_n) vers $\sqrt{3}$.

3°) Etude d'une majoration plus fine de $u_n - \sqrt{3}$.
a) Calculer (avec la calculatrice) u_n pour n = 1, 2, 3, 4, 5. Que constate-t-on?
b) Prouver par récurrence l'inégalité suivante:

$$0 \leq u_n - \sqrt{3} \leq 2\sqrt{3}\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right)^{2^n}.$$

c) Par élévation au carré, vérifier l'inégalité $1,7 < \sqrt{3} < 2$ et en déduire que:

$$0 \leq u_n - \sqrt{3} \leq 4.10^{-2^n}.$$

Quelle majoration de $u_n - \sqrt{3}$ en déduit-on pour n = 1, 2, 3, 4, 5?

Exercice 3

On étudie une suite de jets d'une pièce, puis de deux et trois pièces équilibrées.

1°) Calcul de sommes de séries.

On considère dans cette question un nombre entier $n \geq 1$ et la fonction définie pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle [0, 1[par:

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k.$$

a) Calculer $(1-x)S_n(x)$ et en déduire une expression de $S_n(x)$.

En déduire, pour $0 \leq x < 1$, la somme $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$.

b) Dériver $S_n(x)$ et déterminer la limite de la suite (nx^n) quand n tend vers $+\infty$.

En déduire, pour $0 \leq x < 1$, la somme $\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1}$.

2°) Etude du jet d'une pièce équilibrée.

On lance indéfiniment une pièce équilibrée (c'est à dire donnant Pile ou Face avec la probabilité 1/2) et l'on désigne par T la variable aléatoire indiquant le numéro du jet où, pour la première fois, la pièce donne Face.

a) Déterminer pour tout entier $k \geq 1$ les probabilités des événements $T = k$, $T \leq k$.

b) En déduire l'espérance E(T) de la variable aléatoire T.

3°) Etude du jet de deux pièces équilibrées.

On considère le jeu suivant: on lance indéfiniment un ensemble de 2 pièces équilibrées. Autrement dit, on lance une première fois les 2 pièces, puis on relance une seconde fois les 2 pièces, et ainsi de suite. On désigne:

- par N la variable aléatoire indiquant le numéro du jet où, pour la première fois, chacune des 2 pièces a amené au moins une fois Face.
- par T_1 la variable aléatoire indiquant le numéro du jet où, pour la première fois, la première pièce a amené Face, par T_2 la variable aléatoire indiquant le numéro du jet où, pour la première fois, la seconde pièce a amené Face.

a) Déterminer la probabilité $P(N = 1)$.

b) Comparer les événements $(N \leq k)$ et $(T_1 \leq k \cap T_2 \leq k)$ pour $k \geq 1$.

En déduire les probabilités $P(N \leq 2)$, puis, plus généralement, $P(N \leq k)$ pour $k \geq 1$.

c) Déduire de ce résultat que:

$$P(N = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}.$$

d) On s'intéresse enfin à l'espérance et à la médiane de la variable aléatoire N.

- Exprimer, sous forme de fraction irréductible, l'espérance E(N) de N.
- Etablir que l'inégalité $P(N \leq k) \geq 0.5$ équivaut à l'inégalité $k \geq 2$.

4°) Etude du jet de trois pièces équilibrées.

On considère le jeu suivant: on lance indéfiniment un ensemble de 3 pièces équilibrées. On désigne par N la variable aléatoire indiquant le numéro du jet où, pour la première fois, chacune des 3 pièces a amené au moins une fois Face.

En raisonnant comme à la question précédente, calculer la probabilité $P(N = k)$ où $k \geq 1$, et déterminer, sous forme de fraction irréductible, l'espérance E(N) de N, puis l'entier m tel que l'inégalité $P(N \leq k) \geq 0,5$ soit équivalente à l'inégalité $k \geq m$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail